**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**(теория)**

Решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач.

**Обыкновенными дифференциальными уравнениями** (ОДУ) называются уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции . Их можно записать в виде:

(8.1)

где – независимая переменная.

Наивысший порядок , входящей в уравнение производной, определяет порядок дифференциального уравнения.

Уравнение первого порядка можно записать в виде:

**Решением дифференциального уравнения** (8.1) называется всякая функция , которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

*Общее решение* ОДУ –го порядка содержит произвольных т.е. общее решение уравнения (8.1) имеет вид:

Частное решение ОДУ получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

.

Если постоянная принимает определенное значение , то получим частное решение:

Чтобы выделить одно решение, задают *начальное условие*:

(8.2)

На рис. 8.1 представлено общее решение уравнения первого порядка – семейство интегральных кривых. Частным решением, согласно теореме Коши, является кривая, проходящая через точку .

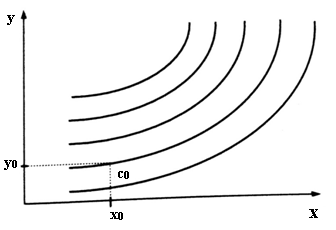


Рис. 8.1.

**Теорема Коши.** Если правая часть уравнения и ее частная производная определены и непрерывны в некоторой области изменения переменных , то для всякой внутренней точки этой области данное уравнение имеет единственное решение, принимающее заданное значение при .

**Задача Коши**

Задача Коши заключается в отыскании функции , удовлетворяющей уравнению и начальному условию (8.2).

Обычно определяют решение задачи Коши на отрезке, расположенном справа от начального значения

Наиболее распространенными численными методами решения дифференциальных уравнений являются *методы конечных разностей*. Сущность этих методов состоит в том, что область непрерывного изменения аргумента и функции заменяется дискретным множеством точек, называемых *узлами*. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется *сеточной*. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением, т.е. производные заменяются конечноразностными отношениями.

Численными методами решаются не только отдельные уравнения, но и системы уравнений (чаще всего первого порядка), причем большинство методов решения одного уравнения легко распространяются на решение систем.

**Метод Эйлера**

Метод Эйлера наиболее простой численный метод решения (систем) обыкновенных дифференциальных уравнений. Он имеет первый порядок точности.

Метод реализуется следующим алгоритмом:

Задано уравнение

и начальные условия:

Значения функции в узлах заменим сеточной функцией .

Для простоты примем постоянным шаг

Заменим производную конечно-разностным отношением:

Отсюда получаем:

Зная значение функции в начальной точке , последовательно можно найти значения функции во всех точках сетки.

**Метод Рунге-Кутта**

Метод Рунге-Кутта является наиболее распространенным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Существует разностные схемы разного порядка точности, построенные на основе этого метода.

Приведем метод четвертого порядка:

;

;

;

.

Данный метод требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения, но это окупается повышенной точностью, что дает возможность производить расчет с более крупным шагом.

Алгоритм расчета подобен алгоритму расчета Эйлера. Разница в том, что внутри цикла сначала вычисляются а затем – значение в новом расчетном узле.

Приведем формулы Рунге–Кутта для системы двух уравнений:

С начальными условиями: при .

Формулы имеют вид:

;

;

;

;

.

Аналогично можно записать формулы Рунге–Кутта для систем из трех и более уравнений. Алгоритм решения аналогичен алгоритму решения системы уравнений методом Эйлера.

**Сравнение методов решения дифференциального**

**управления**

Сравним время решения ДУ по каждому из методов.

Если мы уменьшим шаг в два раза, то поскольку метод Рунге–Кутта имеет порядок точности погрешность уменьшится в 16 раз. Т.к. на каждом шаге правая часть уравнения вычисляется 4 раза, то количество вычислений увеличится в 8 раз.

Чтобы уменьшить погрешность вычислений по методу Эйлера в 16 раз, необходимо уменьшить шаг в 16 раз, это значит, что в столько же раз увеличится количество вычислений правой части. Значит, для метода Рунге-Кутта потребуется в 2 раза меньше времени вычислений.

Кроме того, при вычислении с шагом точность решения методом Рунге – Кутта была выше, а при уменьшении шага в большее число, раз получим еще больший выигрыш по времени вычислений.

Оба метода являются одношаговыми. Особенность таких методов состоит в том, что для получения решения в каждом новом расчетном узле достаточно иметь значение сеточной функции лишь в предыдущем узле. Это позволяет непосредственно начать счет при по известным начальным значениям, что допускает изменение шага в любой точке в процессе расчета. Недостатком одношаговых методов является трудность выбора шага.

**Лабораторная работа 6**

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (**практика**)

**Цель работы:** изучить методы Эйлера и Рунге-Кутта для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и системы ОДУ, формулы для вычисления, написать программу на языке программирования для реализации данных методов.

**Алгоритм метода Эйлера:**

концы интервала;

шаг интегрирования;

начальное условие;

правая часть уравнения.

Ввод ;

;

Начало цикла, условие

;

Печать

Конец цикла.

**Алгоритм метода Эйлера для системы уравнений:**

концы интервала;

шаг интегрирования;

Начальное условие: при ;

Ввод ;

;

Начало цикла, условие

;

;

;

;

Печать

Конец цикла.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

**Задание № 1. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Вариант 1. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях сшагом интегрирования на интервале.

Вариант 2. Решить дифференциальное уравнение при начальных условияхс шагом интегрирования на интервале.

Вариант 3. Решить дифференциальное уравнение при начальных условияхс шагом интегрирования на интервале .

Вариант 4. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале .

Вариант 5. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале ].

Вариант 6. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале .

Вариант 7. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале .

Вариант 8. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале .

Вариант 9. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале .

Вариант 10. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях с шагом интегрирования на интервале .

**Задание № 2. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Вариант 1. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 2. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 3. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 4. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 5. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 6. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 7. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 8. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 9. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом интегрирования

Вариант 10. Решить систему обыкновенных дифферен-циальных уравнений с шагом интегрирования

**Реализация алгоритмов на языке C#**

Для решения *обыкновенных дифференциальных уравнений и систем ОДУ с помощью методов Эйлера и Рунге*–*Кутта* будем использовать методы и циклы с параметров FOR.

В каждом из методов реализован цикл для вычисления значений и вывод результатов вычисления на каждом шаге.

Static void f1(double x0, double y0, double h, double xn)//МетодЭйлерадляОДУ

{

for (doublei=x0+h; i<=xn; i=i+h)

{

Console. WriteLine ("прих={0} , y={1}", i, (y0 + h \* f(i, y0)));

y0 = +y0 + h \* f(i, y0);

}

}

Static void f2 (double x0, double y0,doubleh, doublexn)//МетодРунге-КуттадляОДУ

{

double k0, k1, k2, k3;

for (double i = x0 + h; i<= xn; i = i + h)

{

k0 = f(i, y0);

k1 = f(i + h / 2, y0 + h \* k0 / 2);

k2 = f(i + h / 2, y0 + h \* k1 / 2);

k3 = f(i + h / 2, y0 + h \* k2 / 2);

Console. WriteLine ("прих={0} , y={1}", i, (y0 + 1/6\*h \* (k0+2\*k1+2\*k2+k3)));

y0 = y0 + h \* f(i, y0);

}

}

Аналогичным образом можно написать методы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие дифференциальных уравнений. Общее и частное решение дифференциальных уравнений.

2. Задача Коши и краевая задача.

3. Метод Эйлера. Алгоритм метода Эйлера.

4. Метод Рунге-Кутта. Алгоритм метода Рунге-Кутта.

5. Сравнение методов Эйлера и Рунге-Кутта.

6. Способ повышения точности при использовании численных методов для решения ОДУ.